EXAMEN EXTRAORDINARIO CALCULO III, UAEM

ANGEL CANO

PARTE I (Valor máximo 2 puntos)

Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, cada una vale 1/5 punto si es contestada correctamente, menos 1/5 punto si la respuesta es erronea.

(1) Toda funcion continua alcanza su máximo y su mínimo
(2) La curva de nivel de una funcion de clase C^1 es localmente la grafica de una función
(3) Si una funcion de $\mathbb{R}$ en si mismo es derivable en x y su derivada es no cero, entonces la inversa existe localmente en x.
(4) Toda curva tiene longitud de arco finita.
(5) Toda sucesion de $\mathbb{R}^n$ acotada tiene una subsuseción de Cauchy.
(6) Si dos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que son de clase C^∞ coinciden en un subconjunto abierto propio, entonces son iguales.
(7) Todo punto critico es máximo o mínimo.
(8) Si una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ es derivable en un abierto U, entonces es derivable en U
(9) El conjunto de puntos donde una funcion es derivable es abierto.
(10) Cualesquiera dos normas definidas en un espacio vectorial sobre los reales son equivalentes.

PARTE II (Valor Máximo 5 puntos)

Cada uno de los ejersicios tiene valor de un punto, seleccione 5 de los 7 propuestos y resuelvalos, en cada caso justifique su respuesta.

(1) Sea $\gamma(t) = (acos(wt), asen(wt), bt)$, $t \in \mathbb{R}$, calcule: La curvatura y la torsion en cada punto de esta curva.
(2) Determine si la siguiente función tiene límite en el punto $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{x3 + xy^2 - x^2y - y^3x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

(3) Determine los conjuntos de nivel de la siguiente funcion: $f(x, y, z) = x2 - y^2 + z^2$.
(4) Determine los máximos y mínimos usando el método de multiplicadores de Lagrange de la función $f(x, y, z) = x+y+2z$ restringida en $x^2+y^2+z^2 = 3$.
(5) Calcule el plano tangente a la superficie determinada por $x^2+2y^2+3xz = 10$ en el punto $(1, 2, 1/3)$.
(6) Determine si la sucesión convergen y cual es su punto de convergencia $(ksen(1/k), (1 + 1/k)k)$.

(7) Hallar y representar gr aficamente el dominio, las curvas de nivel, la grafica y la imagen de la funcion: $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

PARTE III

Cada uno de las siguientes proposiciones tiene valor de un punto, seleccione 3 de los 5 propuestos y demuestrelas.

(1) Sean $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Pruebe que el conjunto $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ es convexo.

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, use la regla de la cadena para demostrar que:
$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,y)dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$$

(3) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en U con U abierto y $A \subset U$. Pruebe que, si $det(Df(x)) \neq 0$ para toda $x \in int(A)$, entonces $f(int(A)) \subset int(f(A))$.

(4) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Pruebe que la funcion
$$F(x,y,z) = (f(x,y,z), g(x,y,z), f(x,y,z) + g(x,y,z))$$
es tal que, si tuviera inversa en alguna vecindad de algun punto, esta no seria derivable.

(5) Si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una funcion lineal, pruebe que L es derivable para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y que $DL(x) = L$.

UCIM, Av. Universidad s/n. Col. Lomas de Chamilpa, C.P. 62210, Cuernavaca, Morelos, México.

E-mail address: angelcano@im.unam.mx