Examen a Título de Suficiendia de Análisis 2 **Noviembre de 2015**

Resuelve los problemas asegurándote que expliques cada paso y que escribas la respuesta completa. Se calificará el examen sobre un total de 15 puntos.

1. (1.5 pts) Sea g una función Riemann integrable en el intervalo $[0,1]$. Probar que la función definida como
$$f(x) = \int_0^x g(t)\, dt \quad \text{para } x \in [0,1]$$
es de variación acotada en $[0,1]$.

2. (2.5 pts) Mostrar que la función
$$f(t) = \begin{cases} t - 2t^2 \operatorname{sen}(1/t) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$
cumple que $f'(0) = 1$, que f' es acotada en $(-1,1)$, pero que f no es inyectiva en ninguna vecindad del 0.

3. (1.5 pts) Supóngase que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es derivable en una bola $U \subset \mathbb{R}^n$. Para $\vec{x}$, $\vec{y} \in U$, sea $L(\vec{x}, \vec{y})$ la recta que une a $\vec{x}$ y $\vec{y}$. Usando el Teorema del Valor Medio probar que si
$$\|\nabla f(\vec{z})\| \leq M \qquad \text{para toda } \vec{z} \in L(\vec{x}, \vec{y})$$
entonces
$$\|f(\vec{y}) - f(\vec{x})\| \leq M\|\vec{y} - \vec{x}\|.$$
(Sugerencia: En el Teorema del Valor Medio, usar un vector unitario y desigualdad de Cauchy)

4. (a) (1 pt) Sea $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $\|\vec{f}(t)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probar que $\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0$.

   (b) (1 pt) Supóngase que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cumple $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si además f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$, probar que $x \cdot \nabla f(x) = 2f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

5. (2.5 pts) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una *función convexa*, es decir
$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leq t f(\vec{x}) + (1-t) f(\vec{y}) \qquad \text{para toda } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,1].$$
Suponiendo que f es derivable, probar que
$$(Df(\vec{x}) - Df(\vec{y}))\,(\vec{x} - \vec{y}) \geq 0$$

6. (1 pt) Si para $t \in [a,b]$ se define $\gamma(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, con f_i de clase C^1 en todo $\mathbb{R}$, probar que γ es una curva rectificable. *(Sugerencia: Basta establecer que toda f_i es de variación acotada)*

7. Denotemos por $BV[a,b]$ a la clase de funciones de variación acotada.

   (a) (1.5 pts) Probar que $BV[a,b]$ es un espacio lineal, es decir, cerrado bajo suma de funciones y multiplicación por escalares.

   (b) (1 pt) Probar que $BV[a,b]$ es el mínimo espacio lineal que contiene a las funciones monótonas. *(Sugerencia: Si S es cualquier espacio lineal que contiene a las funciones monótonas probar que $BV[a,b] \subseteq S$)*

8. (2 pts) Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua de variación acotada y supóngase que $g \in \mathcal{R}(\alpha)$. Defínase

$$\beta(x) = \int_a^x g\,d\alpha \quad \text{para } x \in [a,b].$$

Mostrar que si f es creciente en $[a,b]$ y es continua en todo $[a,b]$ entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,d\alpha(x) = f(a)\int_a^{x_0} g\,d\alpha + f(b)\int_{x_0}^b g\,d\alpha$$

9. Supóngase que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es Riemann integrable.

   (a) (1.5 pts) Argumentar usando sumas de Riemann por qué existe se da la siguiente identidad:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

   (b) (1 pt) Deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$$

10. Considérense las siguientes formas diferenciables en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega_1 = (3z^2 + \cos(xy))dx \wedge dy - (e^x)dy \wedge dz + (3x^2 - \operatorname{sen}(yz))dz \wedge dx$$

$$\omega_2 = (2z+3)dx + (x^2 - \cos y)dz$$

   (a) (1 pt) Calcular $\mathbf{d}(\omega_1)$ y $\mathbf{d}(\omega_2)$

   (b) (1 pt) Calcular $\omega_2 \wedge \omega_2$