Examen a Título de Suficiencia de Probabilidad

LICENCIATURA EN CIENCIAS UAEM

Mayo de 2017

Conteste sólo 6 problemas.

1. Demuestre las siguientes propiedades que se cumplen para cualquier evento:

   a) $P(B^c) = 1 - P(B)$.

   b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Considere el experimento de extraer dos cartas al azar de una bolsa que contiene cuatro cartas marcadas con los enteros del 1 al 4. Antes de responder calcule el número de elementos que tendrá el espacio muestral solicitado en cada caso.

   a) Encuentre el espacio muestral Ω_1 de este experimento si la primera carta es reemplazada (regresada a la bolsa) antes de extraer la segunda carta.

   b) Encuentre el espacio muestral Ω_2 de este experimento si la primera carta no es reemplazada.

3. Sea E un evento para el cual $P(E) \geq 0$. Muestre que la función de probabilidad condicional $P(*|E)$ satisface los axiomas de un espacio de probabilidad, es decir:

   a) Para cualquier evento A, $P(A|E) \geq 0$.

   b) Para cualquier evento seguro S, $P(S|E) = 1$.

   c) Para dos eventos mutuamente excluyentes cualquiera A y B se tiene $P(A \cup B|E) = P(A|E) + P(B|E)$.

4. Encuentre el valor de expectación y la varianza de la variable X que tiene una distribución $U(0, 1)$.

5. Suponga que el número de accidentes que ocurren en una ciudad está dada por una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 3$.

a) Encuentre la probabilidad de que 3 o mas accidentes ocurran en un día.

b) Si se sabe que al menos ocurre un accidente diario, encuentre la probabilidad que ocurran 3 o mas accidentes en un día.

6. Demuestre el siguiente teorema:
Supongase que X y Y son variables aleatorias con densidades $f(x)$ y $g(y)$. La suma X+Y tiene la densidad dada por:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx\,.$$

7. La densidad conjunta de las v.a. X y Y esta dada como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}e^{-2y}}{y} & 0 < x < \infty,\, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcular $P(X > 1|Y = y)$.