UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Centro de Investigación en Ciencias

Introducción a la Lógica
Semestre Agosto-Diciembre 2015
Examen a Título de Suficiencia

Nombre del Alumno: ______________________________ **Fecha:** ______________

1. [2 pts.] Considere los siguientes conjuntos $X = \{1, 4, a, b, c, d, e\}$; $Y = \{3, c, 2, d, 5\}$ y $Z = \{a, b, 2, 3, 5\}$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

   a) $(X \setminus Y = Z \cap Y) \wedge (Z \cap Y = \{x \mid x \in Z \wedge x \in Y\})$.

   b) $(X \cup Y = X \cup Z) \wedge (Y \neq Z)$.

   c) $(Y \subseteq X) \vee (Y \subseteq Z)$.

2. [8 pts.] Simboliza las siguientes oraciones en Lógica Proposicional. Enuncia claramente tus proposiciones atómicas.

   a) Si ocurre una petición, entonces o será reconocida eventualmente, o el proceso solicitante nunca progresará.

   b) Hoy lloverá o nevará, pero no ambos.

   c) Mi hermana quiere un gato blanco y negro.

   d) El cancer no se curará a menos que su causa sea determinada y una nueva medicina para el cancer se encuentre.

3. [20pt.] ¿Cuál de las siguientes secuencias deductivas permite demostrar que $q \to (p \to r), \neg r, q \vdash \neg p$ es válida:

(a) $q \to (p \to r), \neg r, q \vdash \neg p$

(1)	$q \to (p \to r)$	premisa
(2)	$\neg r$	premisa
(3)	q	premisa
(4)	$p \to r$	$e\to 1, 3$
(5)	p	hipotesis
(6)	r	$e\to 4, 5$
(7)	$\bot$	$e\neg 2, 6$
(8)	$\neg p$	$i\neg 5-7$

(b) $q \to (p \to r), \neg r, q \vdash \neg p$

(1)	$q \to (p \to r)$	premisa
(2)	$\neg r$	premisa
(3)	q	premisa
(4)	$\neg p \to \neg q$	$e\to 1, 2$
(5)	$\neg p$	hipotesis
(6)	$\neg q$	$e\to 4, 5$
(7)	$\bot$	$e\neg 3, 6$
(8)	$\neg p$	$i\neg 5-7$

(c) $q \to (p \to r), \neg r, q \vdash \neg p$

(1)	$q \to (p \to r)$	premisa
(2)	$\neg r$	premisa
(3)	q	premisa
(4)	$p \to r$	$e\to 1, 3$
(5)	p	hipotesis
(6)	$p \vee \neg p$	LEM
(7)	$\bot$	$e\neg 5, 6$
(8)	$\neg p$	$i\neg 5-7$

4. [4 pts.] Contesta Falso o Verdadero:

   a) [F | V] Demostrar que la expresión $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_n \vdash \psi$ es válida, significa que ψ es una consecuencia lógica del conjunto $\{\phi_k | k = 1, 2, 3, ..., n\}$ por las reglas de la deducción natural.

   b) [F | V] Si $\vdash \psi$ es válida entonces $\models \psi$ es una tautología.

   c) [F | V] Si ψ NO es válida desde el punto de vista semántico, entonces $\vdash \psi$ tampoco es válida.

   d) [F | V] Si $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \vdash \psi$ NO es válida, entonces $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \models \psi$ no opera.

5. Realiza lo que se pide a continuación:

   a) [2 pts.] Dibuja el árbol de parseo de la siguiente fórmula-bien-formada:

   $$\phi := (\neg((\neg((r \vee p) \rightarrow q)) \rightarrow (q \wedge p)))$$

   b) [2 pts.] Determina el valor de verdad de ϕ, indicando en cada nodo del árbol si el nodo es V o F, dado el modelo siguiente:

   $$M_1 := \{p, q, r | p := F \ ; \ q := V \ ; \ r := F\}$$

6. [12 puntos] Demuestra por inducción lo siguiente:

   $$(2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2 \cdot n - 1) = n^2$$

7. Considera los predicados E(x):"*x es un estudiante*", C(x):"*x es un ciudadano*", V(x,y):"*x es un voto de y*".

   Traduce las siguientes oraciones a proposiciones en Lógica de Predicados:

   a) [5 pts.] *Cualquier estudiante es un ciudadano*

   b) [5 pts.] *Los votos de estudiantes son votos de ciudadanos*

8. Sean dos modelos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ en Lógica de Predicados. Las interpretaciones de dos predicados P y E y de una función f, en ambos modelos son las siguientes:

   a) $P(x, y)$, que significa: "$x < y$".
   b) $E(x, y)$, que significa: "$x = y$".
   c) $f(x, y)$, que devuelve: "$x * y$".

   Los dominios de definición son respectivamente:

   a) $A_1 = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$. Es decir los números naturales hasta un valor 'n'.
   b) $A_2 = \mathbb{R}$. Es decir todos los números reales.

   Para cada una de las siguientes fórmulas:

   a) $\exists x \forall y(\neg P(x, y) \wedge \neg E(x, y))$
   b) $\forall x \exists x_1 \exists x_2(E(x, f(x_1, x_2)) \wedge P(x_1, x) \wedge P(x_2, x))$

   Contesta lo siguiente:

   a) [10 puntos] ¿$\mathcal{M}_1$ satisface ambas fórmulas? Justifica.
   b) [10 puntos] ¿$\mathcal{M}_2$ satisface ambas fórmulas? Justifica.

9. Considera $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(x, a), \neg Q(y, a)\}$ y contesta lo siguiente:

   a) [10 puntos] Porporciona el conjunto de sustituciones que unifican a S.
   b) [10 puntos] Demuestra por Resolución que S es insatisfactible.