EXAMEN DEPARTAMENTAL DE PROBABILIDAD
LICENCIATURA EN CIENCIAS, IICBA, UAEM
DICIEMBRE 2017

Instrucciones: resuelve correctamente cada uno de los siguientes problemas, escribiendo el procedimiento de manera clara y precisa (RESOLVER ÚNICAMENTE 10 PROBLEMAS).

1. (**2 puntos**) Demuestre la desigualdad de Boole

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2. (**1 punto**) Las tiendas A, B y C tienen 50, 75 y 100 empleados, respectivamente, y 50%, 60%, y 70% de ellos son mujeres, respectivamente. Las renuncias tienen la misma probabilidad de ocurrir, sin diferencia del sexo. Si una empleada renuncia, hallar la probabilidad de que ella trabaje en la tienda C.

3. (**1 punto**) Suponga que el número de accidentes que ocurren en una ciudad está dada por una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 3$. a) Encuentre la probabilidad que 3 o más accidentes ocurran en un día. b) Si se sabe que al menos ocurre un accidente diario, encuentre la probabilidad que ocurran 3 o más accidentes en un día.

4. (**2 puntos**) Demuestre que una variable aleatoria geométrica X con parámetro p tiene la propiedad de "no memoria".

5. (**1 punto**) Demostrar la desigualdad Bonferroni

$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1$$

y usar inducción para generalizar la desigualdad para n eventos, esto es, demostrar que

$$P(E_1 E_2 ... E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n) - (n-1).$$

6. (**2 puntos**) Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) ¿Cuál es el valor de k?
   (b) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?
   (c) Calcule la covarianza de X y Y.

7. (**1 punto**) Un estudiante está resolviendo un examen que consta de 10 preguntas del tipo falso-verdadero. Si el estudiante sólo está adivinando las respuestas, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación de al menos 8?

8. (**1 punto**) Sea X una variable aleatoria tal que $E[X] = 1$ y $\text{Var}(X) = 5$. Calcule $E[(2+X)^2]$ y $\text{Var}(4+3X)$.

9. (**2 puntos**) Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p. Probar que

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

10. (**1 punto**) Llegas a una parada de autobús a las 10:00, suponiendo que el tiempo de llegada del autobús está distribuido uniformemente entre las 10 y 10:30. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que tengas que esperar más de 10 minutos? (b) Si a las 10:15 el autobús aún no ha llegado, ¿cuál es la probabilidad de que tengas que esperar al menos 10 minutos adicionales?

11. (**1 punto**) Sea X una variable aleatoria normal con media 12 y varianza 4. Hallar el valor c tal que $P\{X > c\} = .10$.