EXAMEN EXTRAORDINARIO DEL CURSO ÁLGEBRA LINEAL I

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS

Y APLICADAS, Febrero 2015

Problema 1: Escoger solo un inciso (**1**,**1**) o (**1**,**2**).

1.1 Verificar cuáles de los siguentes conjuntos forman un subespacio, justificar su respuesta y, en el caso afirmativo, construir una base:

(**1**,**1a**) Conjunto Sym $\subset$ $\mathrm{M}_{2\mathrm{x}2}$ de las matrices simétricas, es decir las matrices cuyos elementos tienen la propiedad $a_{ij} = a_{ji}$.

(**1**,**1b**) Conjunto de los vectores de $\mathbf{R^3}$ respecto a las operaciones siguientes

$$(u_1, u_2, u_3) \oplus (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 0), \quad \lambda \odot (u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, u_2, 0)\,.$$

1.2 Verificar cuáles de los siguentes conjuntos forman un subespacio, justificar su respuesta y, en el caso afirmativo, construir una base:

(**1**,**2a**) Conjunto S $\subset$ $\mathrm{M}_{3\mathrm{x}3}$ de las matrices con la propiedad $a_{ij} = -a_{ji}$ (es decir, matrices anti-simétricas).

(**1**,**2b**) Conjunto de los vectores del espacio $\mathbf{R^3}$ con las las siguientes relaciones entre sus coordenadas $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$.

(**1**,**2c**) Conjunto de los vectores del espacio $\mathbf{R^3}$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$.

Problema 2: Escoger solo un inciso (**2**,**1**) o (**2**,**2**).

2.1 Encuentra las imágenes de los vectores de la base estándar $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ del espacio vectorial $\mathbf{R^4}$ bajo la siguiente transformación lineal:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= y_1 \\ 2x_2 - x_3 &= y_2 \\ x_3 + x_4 &= y_3 \\ 2x_2 - x_3 &= y_4 \end{aligned}$$

Encuentra $Ker(T)$ y la dimensión de la imagen T, $\mathrm{Im}(T)$.

Determina si $\vec{u} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$ pertenece al $\mathrm{Im}(T)$.

Encuentra algún vector que no se encuentre en el rango de T, $\mathrm{Im}(T)$.

2.2 Defina una transformación lineal $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que asigne a los vectores $\vec{a}_1 = (1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,0)$, $\vec{a}_3 = (1,0,0)$, los vectores $\vec{b}_1 = (3,0,0)$, $\vec{b}_2 = (4,2,0)$, $\vec{b}_3 = (1,3,0)$, respectivamente.

Demuestra que esta transformación es única y encuentre $T(x,y,z)$, $\mathrm{Ker}\,T$, y $\dim \mathrm{Im}(T)$.

Problema 3: Escoger solo un inciso (**3**,**1**) o (**3**,**2**) o (**3**,**3**).

3.1 Encontrar las coordenadas del vector $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$ respecto a la nueva base:

$\vec{a}_1 = \vec{e}_1\,,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

3.2 Encuentra los elementos b_{31} y b_{32} de la matriz inversa para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.3 Encuentra la matriz X de la ecuación $AX = B$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 4: Escoger solo un inciso (**4**,**1**) o (**4**,**2**).

4.1 Encontrar la base y dimensión del espacio $L = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ generado por los siguientes polinomios en $\mathbf{P}_2(t)$:

$$p_1(t) = t + 1\,, \quad p_2(t) = t^2 + 1\,, \quad p_3(t) = 7 \quad p_4(t) = 2t^2 + 1 + 3t - 2\,.$$

Compruebe que el polinomio $q(t) = 2t^2 + 3t + 33$ pertence al espacio L, presentando la combinacin lineal de vectores de la base.

4.2 Encontrar todos valores de λ con los cuales el vector $\vec{b} = (7, -2, \lambda)$ se expresa a través de los vectores

$\vec{a}_1 = (2, 3, 5),\ \vec{a}_2 = (3, 7, 8),\ \vec{a}_3 = (1, -6, 1).$

Problema 5: Escoger solo un inciso (**5**,**1**) o (**5**,**2**).

5.1 Encontrar la forma diagonal de la transformación lineal T dada por su matríz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

si los vectores $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{v}_4 = (1, -1, -1, -1)$ son vectores propios.

Encontrar la matriz de la transformación T en la base $\{\vec{v}_4 + \vec{v}_3, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_2, -\vec{v}_1\}$.

5.2 Una transformación lineal $T : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}^3$ asigne a los vectores de la base las siguientes imágenes $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\,,\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1\,,\ \vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\,.$

Determine si es posible diagonalizar el operador T.

Dé una interpretación geométrica.