# Examen Extra de Probabilidad
## IICBA Ciencias, UAEM

Instrucciones: Resuelve correctamente cada uno de los siguientes problemas (sume 10 puntos para obtener 10 de calificación).

1. **(2 puntos)** Demuestre la desigualdad de Bonferroni
$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1,$$
y use inducción para generalizar la desigualdad para $n$ eventos, esto es, demuestre que
$$P(E_1E_2\cdots E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) - (n-1).$$

2. **(1 punto)** La proporción de personas en una comunidad que tienen cierta enfermedad es 0.005. Está disponible una prueba para diagnosticar la enfermedad. Si una persona la padece, la probabilidad de que la prueba dé una señal positiva es 0.99. Si una persona no está enferma, la probabilidad de que la prueba dé una señal positiva es 0.01. Si una persona sale positiva en la prueba. ¿cuál es la probabilidad de que la persona realmente esté enferma?

3. **(1 punto)** Supongamos que de $N$ objetos elegimos $n$ al azar, con sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún objeto sea elegido más de una vez?

4. **(1 punto)** Considere un vector aleatorio bidimensional $(X, Y)$ con función de de densidad conjunta
$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$
Encuentre $P\{(X,Y) \in D\}$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

5. **(2 puntos)** Demuestre que el coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$ satisface que $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

6. **(1 punto)** Supóngase que la probabilidad de que un artículo producido por una máquina especial sea defectuoso es igual a 0.2. Si 10 artículos producidos, se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no encuentre más de un artículo defectuoso? Use la distribución binomial y de Poisson y compare las respuestas.

7. **(2 puntos)** Una caja contiene tres cartas, 1, 2 y 3. Se eligen aleatoriamente dos de ellas, se reemplaza la primera antes de que salga la segunda. $X$ representa el número en la primera y $Y$ representa en la segunda.
   a) Determine la función de masa de probabilidad conjunta de $X$ y $Y$.
   b) Determine las funciones de masa de probabilidad marginal $p_X$ y $p_Y$.
   c) Determine $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

8. **(1 punto)** Sea $Y = \tan X$. Encuentre la función de densidad de probabilidad de $Y$ si $X$ es una variable aleatoria uniforme sobre $(-\pi/2, \pi/2)$.

9. **(2 puntos)** Sea $Y = aX + b$.
   a) Calcule la covarianza de $X$ y $Y$.
   b) Calcule el coeficiente de correlación de $X$ y $Y$.