Examen Extraordinario

Octubre 2016

Cálculo 4

Nombre:____

Instrucciones: lee cuidadosamente cada uno de los siguientes problemas y escribe ordenadamente el procedimiento empleado para su resolución. Para obtener una calificación de 10 necesitas reunir 8 puntos.

1. **[1P]** Utilizando coordenadas esféricas, calcular la integral de $f(\rho,\phi,\theta)=\frac{1}{\rho}$ sobre la región del primer octante de $\mathbb{R}^3$ que está acotada por los conos $\phi=\frac{\pi}{4}$, $\phi = arctan(2)$ y la esfera $\rho=\sqrt{6}$.

2. **[1p]** Sea D una región no acotada definida como el conjunto de (x,y,z) tales que $x^2+y^2+z^2\geq 1$. Por medio de un cambio de variables, calcular la integral impropia
$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

3. **[1P]** El toro se puede representar paramétricamente por la función $\mathbf{\Phi}: D\to\mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{\Phi}$ viene dada por las funciones coordenadas $x=(R+\cos\phi)\cos\theta$, $y=(R+\cos\phi)\sin\theta$, $z=\sin\phi$, donde D es el rectángulo $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ y el valor $R>1$ está fijado. Demostrar que $A(T)=(2\pi)^2R$

4. **[1P]** Suponga que la velocidad de un fluido está descrita por $\mathbf{F}=6xz\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$. Calcular la tasa con que el fluido está saliendo del cubo unidad.

5. **[1P]** Evaluar la integral de superficie $\iint_S xyzdS$, donde S es la parte del cono $z^2=x^2+y^2$ entre los planos $z=1$ y $z=4$.

6. **[1P]** Sea $\mathbf{a}$ un vector constante y $\mathbf{F}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$. ¿$\mathbf{F}$ es conservativo? En caso afirmativo hallar un potencial.

7. **[2P]** a) Enuncia el teorema de Green.
b) Aplica el teorema de Green al campo $F(x,y)=(-y,x)$ para demostrar que el área de una región D con frontera ∂D^+ es $A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D^+}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.
c) Calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización $\alpha(t)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t\in[0,2\pi]$.

8. **[1P]** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y,z)=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ al mover un objeto a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t)=\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$ donde $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.

9. **[1P]** Evaluar $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2+y^2=1$, acotada por los planos $z=1$ y $z=-1$, e incluyendo los trozos $x^2+y^2\leq 1$ cuando $z=\pm 1$