# EXAMEN EXTRAORDINARIO DE PROBABILIDAD

## FEBRERO DE 2015.

Resuelve 6 (y sólo 6) de los siguientes problemas.

1. En un curso de probabilidad se han matriculado 8 matemáticos y 15 físicos. Se tiene que constituir una comisión de 2 matemáticos y 3 físicos para negociar con el profesor el horario del curso. Calcula el número de formas en que puede hacerse si,

   - todos son elegibles,
   - un físico particular ha de estar en esa comisión.
   - dos matemáticos concretos no pueden estar juntos.

2. Se extraen 2 bolas (sin remplazo) de un urna que contiene 6 bolas blancas y 3 negras. Describe todos los posibles resultados de este experimento. ¿Son los resultados del experimento igualmente probables? Calcula las probabilidades respectivas.

3. Tenemos una urna con 6 bolas blancas y 5 bolas negras y 2 rojas. Sean $A$ y $B$ los eventos definidos como: $A =$ "extraemos tres bolas (sin remplazo) de la urna sucesivamente siendo la segunda blanca y la tercera roja" y $B =$ "extraemos tres bolas (sin remplazo) de la urna sucesivamente siendo la primera negra". Calcula $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

4. En cierta facultad de ciencias sólo hay tres carreras: física, matemáticas y ciencias de la computación, con 63, 48 y 83 estudiantes respectivamente. En dicha facultad se da un curso de Probabilidad en el que hay 10 estudiantes de matemáticas, 8 de física y 7 de ciencias de la computación. En una encuesta, un estudiante escogido al azar entre todos los de la facultad, mencionó que estaba tomando el curso de probabilidad.

   a) ¿Cuál es la probabildad de que este estudiante esté matriculado en el área de matemáticas?
   b) ¿Cuál es la probabildad de que este estudiante esté matriculado en el área de computación?

5. Héctor tiene una caja con 15 canicas, 8 de las cuales son negras y el resto son blancas. Roberto, su hermano, ha sacado 3 canicas al azar, y las que le salieron blancas las ha pintado de negro y las ha devuelto todas a la caja. Héctor se entera de lo que ha hecho su hermano pero ahora no sabe cuántas canicas negras tiene en la caja. Saca 3 bolas al azar y todas resultan ser negras. ¿Cuál es la probabilidad de que las treas canicas extraídas hayan sido pintadas por Roberto?

6. **(Banco de problemas)** Una fábrica de monedas ha puesto en circulación un lote de monedas. Se sabe que 75 % de las monedas están perfectamente balanceadas, y por lo tanto, al echar un "volado" hay igual probabilidad de que caiga "águila" que "sol" (son honestas). El 25 % de las monedas están sesgadas, es decir, tienen una ligera preferencia por que salga "águila"

(con probabilidad de 0.55) que "sol" (lo que ocurre con probabilidad de 0.45) al echar un volado. Las monedas son a simple vista indistinguibles, y la única manera de saber si son sesgadas u honestas es echando volados. En nuestras manos ha caído una moneda de las que se han puesto en circulación y queremos saber de qué clase es. Para esto la lanzamos 3 ocasiones. Si en las tres ocasiones ha salido "águila", ¿cuál es la probabilidad de que la moneda sea sesgada?

7. Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$. Sea $Y = X^2$. Calcula $P(1 \leq Y \leq 2)$. Expresa tu resultado en términos de la función de distribution normal estándar $\Phi$.

8. Considera una v.a. cuya densidad de probabilidad es,

$$f(x) = \begin{cases} cx^3 & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{si ocurre otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcula el valor de $c$ para el cual $f(x)$ es, en efecto, una densidad de probabilidad.
   b) Calcula la función de distribución (acumulada) $F(x)$ de $X$.

9. (**Banco de problemas**) Sea $(X,Y)$ un vector aleatorio discreto cuya función de probabilidades $f(x,y)$ está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } (x,y) \in \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \\ 1/8 & \text{si } (x,y) \in \{(3,1),(2,1)\} \\ 1/4 & \text{si } (x,y) \in \{(2,3)\} \\ 0 & \text{si ocurre otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcula $P(X \leq Y)$.
   b) Calcula $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
   c) ¿Son independientes $X$ y $Y$? Justifica tu respuesta.