Examen a titulo de suficiencia

Noviembre 2016

Cálculo 4

Nombre:____

Instrucciones: lee cuidadosamente cada uno de los siguientes problemas y escribe ordenadamente el procedimiento empleado para su resolución. Para obtener una calificación de 10 necesitas reunir 8 puntos.

1. **[1P]** a) Encuentra la longitud de arco de la curva parametrizada $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = 3\sin t$, $z(t) = 4t$, $t \in [0, 2\pi]$.
   b) Si la curva de arriba es un alambre con densidad $\delta(x, y, z) = kz$ determinar su masa.

2. **[1p]** Sea D una región no acotada definida como el conjunto de (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$. Por medio de un cambio de variables, calcular la integral impropia
$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

3. **[1P]** Suponga que la velocidad de un fluido está descrita por $\mathbf{F} = 6xz\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Calcular la tasa con que el fluido está saliendo del cubo unidad.

4. **[1P]** a) Demostrar que $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\mathbf{j} - 3x^2y(\sin z)\mathbf{k}$ es conservativo.
   b) Hallar f tal que $\mathbf{F} = \bigtriangledown f$.
   c) Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$, $z = 0$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

5. **[2P]** Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2 = 2x$ y por el cono $z^2 = x^2+y^2$ si la densidad es $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. **[2P]** a) Enuncia el teorema de Green.
   b) Aplica el teorema de Green al campo $F(x, y) = (-y, x)$ para demostrar que el área de una región D con frontera ∂D^+ es $A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.
   c) Calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

7. **[1P]** Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ al mover un objeto a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ donde $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

8. **[2P]** Sea S la superficie del cubo unidad $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, y sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a S. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, empleamos el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS$. Comprobar el resultado calculando la integral directamente.