UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS

Av. Universidad 1001, Chamilpa, Cuernavaca, Morelos México.
CP 62210. Tel. 777 329 7000

Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Álgebra 1

Examen

Nombre: (5 de marzo de 2019)

Problema 1. Sea $G = \{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0\}$. Demuestra que G es un grupo con la multiplicación usual de matrices. **Nota**: El elemento identidad no es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Problema 2. Demuestra que $[a]$ es invertible en $\mathbb{Z}_n$ si y sólo si $mcd(a, n) = 1$.

Problema 3. Demuestra uno de los siguientes problemas.

(*a*) Si G es un grupo abeliano cuyo elemento identidad es e, demuestra que $H = \{a \in G \mid a^2 = e\}$ es un subgrupo de G.

(*b*) Si G es finito, demuestra que $\{g^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es un subgrupo de G para todo $g \in G$.

Problema 4. Sea G cíclico de orden n y sea e el elemento identidad de G. Demuestra que $g^n = e$ para toda $g \in G$.

Problema 5. Demuestra uno de los dos incisos.

(*a*) Si G es un grupo cíclico infinito, demuestra que G es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

(*b*) Si $G =< a >$ es un grupo cíclico y el orden de a es n , demuestra que G es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.