Examen Departamental
Métodos Matemáticos de la Física IV
1 de diciembre de 2016

Nombre: _____

Resuelve 6 de los siguientes 8 problemas:

1. (Sturm-Liouville) Encuentra la función de peso $\rho(x)$ bajo la cual el conjunto $\{T_n(x)\}$ de soluciones de la ecuación de Chebyshev
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$
con n entera forma un conjunto ortogonal, i.e., $\int_{-1}^{1} dx\, \rho(x) T_n(x) T_m(x) = 0$ si $n \neq m$.
Pista: Escribe la ecuación diferencial en la forma de Sturm Liouville.

2. (Armónicos esféricos) Dada una función arbitraria $f(\theta, \phi)$ definida sobre la esfera unitaria, donde θ es el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal, halla una expresión para los coeficientes a_{lm} en la expansión en términos de armónicos esféricos Y_l^m,
$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_l^m(\theta,\phi)$$

3. (Función gamma) Demuestra que
$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b),$$
donde Γ es la función Gamma, y
$$B(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin(\theta)^{2a-1} \cos(\theta)^{2b-1}$$
es la función Beta.

4. (Puntos singulares) Encuentra los tres puntos singulares de la ecuación de Legendre
$$(1-x^2)y'' - 2xy'' + \ell(\ell+1)y = 0.$$
De ellos, ¿cuáles son regulares y cuáles son esenciales?

5. (Integración gaussiana) Se desea aproximar la integral
$$I = \int_0^{\infty} dx\, f(x) e^{-x}$$
por una suma
$$I \approx \sum_{i=1}^{3} \omega_i f(x_i).$$
con ciertos pesos ω_i y abscisas x_i. Cómo deben seleccionarse las absisas para que esta aproximación arroje el resultado exacto cuando f sea un polinomio de orden menor o igual a 5?
Pista: Considera el conjunto de polinomios ortogonales bajo la métrica e^{-x}.

6. (Frobenius) Encuentra el valor del exponente σ para que la serie

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$$

resuelva la ecuación $x^2y'' + xy'(x^2 - 1/4)y = 0$.

7. (Ecs. integrales) Halla una solución $y(x)$ de la ecuación integral

$$y(x) = \cos(x) + \int_0^{2\pi} dx' \, \cos(x - x')y(x').$$

Pista: Escribe $y(x)$ como una serie de Fourier y emplea la ortogonalidad de las funciones trigonométricas.

8. (Ecs. diferenciales parciales)
   (a) Escribe la ecuación de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\vec{r}, t) = 0$$

   en coordenadas esféricas r, θ, ϕ con r la coordenada radial, θ el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal.
   (b) Plantea una solución mediante separación de variables $\phi(\vec{r}, t) = T(t)R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ y halla las ecuaciones diferenciales ordinarias que obedecen las funciones T, R, Θ y Φ.
   (c) Demuestra que hay soluciones de la forma $T(t) \propto e^{-i\omega t}$ con ω un número real,
   (d) $R(r) \propto r^{-1/2}J_{\ell+1/2}(kr)$ con J_ν funciones de Bessel, ℓ un número entero y $k = \omega/c$,

   Pista: La ecuación diferencial que cumplen las funciones de Bessel $y(x) = J_\nu(x)$ es

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$