Métodos de Física Matemática 1

Septiembre de 2016

Examen Extraordinario

Instrucciones: Resuelve todos los problemas propuestos.

1. Las coordenadas parabólicas (s,t) se definen mediante la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= st, \\ y &= \frac{1}{2}\left(s^2 - t^2\right). \end{aligned}$$

(a) Escribe los vectores de la base curvilínea y muestra directamente que son ortogonales.
(b) Calcula el tensor métrico para las coordenadas parabólicas.

2. Muestra que si un tensor T^{jkl} es simétrico respecto de los índices j y l, entonces éste es simétrico respecto de los índices correspondientes en cualquier sistema de referencia; i.e., si $T^{jkl} = T^{lkj}$ entonces $\bar{T}^{jkl} = \bar{T}^{lkj}$.

3. Calcula la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-|x|}$

4. Sean $\tilde{f}_m$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una función real $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sobre un intervalo de longitud $L = b - a$, esto es,

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_m e^{2\pi i m x/L}.$$

   - Muestra que, dado que f es real, se tiene que

$$f_m = f^*_{-m}$$

     (el asterisco indica complejo conjugado).
   - Suponga ahora que f está definida sobre un intervalo simétrico alrededor del origen, esto es $f : (-a,a) \to \mathbb{R}$, donde $a \in \mathbb{R}$. Muestra que si los coeficientes satisfacen la condición: $f_n = -f_{-n}$, entonces, la función f es impar.

5. (**Banco**) Obtén la trayectoria ζ en $\mathbb{R}^2$ que minimiza la integral de línea

$$\int_\zeta f(x,y,\dot{x},\dot{y})ds$$

donde $f(y,x) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ y ζ es una trayectoria que tiene por extremos los puntos $\mathbf{r}(t = t_0) = (0,0)$ y $\mathbf{r}(t = t_0) = (1,1)$.

6. (**Banco**) Muestra que la transformada de Laplace de la solución regular de la ecuación diferencial

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

está dada por

$$\mathbf{L}[y](s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}}$$